

Aritmetică și algebra

Mulțimi

\in aparține \notin nu aparține \subset inclusă \supset include
 Φ -mulțimea vidă (nu are niciun element)
 -Cardinalul unei mulțimi=câte elemente are acea mulțime.
 -Mulțimi disjuncte = care nu au elemente comune
 N - naturale: 0,1,2,3,... N^* - naturale fără 0 (nenule): 1,2,3,...
 Z - întregi: -4,0,9,+12
 Q - raționale: $\frac{3}{5}; -4; 3; -6; 2; 3; (4)$ R - reale: $\sqrt{7}; \frac{3}{5}; -4; 3; 3; (4)$
 Irraționale: $(R - Q) \sqrt{7}; -\sqrt{2}; \pi; \dots$ $[N \subset Z \subset Q \subset R]$
 Operații cu mulțimi $A = \{2; 4; 7\}; B = \{7; 9\}$
 reuniunea $A \cup B = \{2; 4; 7; 9\}$ intersecția $A \cap B = \{7\}$
 diferența $A - B = \{2; 4\}$ produs cartezian $A \times B = \{(2;7); (2;9); (4;7); (4;9); (7;7); (7;9)\}$

Numere naturale

-Numere consecutive = unul după altul Ex. 4; 5
 -Număr par (cu sot) 0, 2, 4, 6, 8, 10, ...; are forma 2k
 -Număr impar (fără sot) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...; are forma 2k+1
 $xy = 10x + y$ $abc = 100a + 10b + c$ $abcd = 1000a + 100b + 10c + d$
 -Pătratul lui 7 este 7² = 49; cubul lui 2 este 2³ = 8
 -Pătrat perfect = este egal cu pătratul unui număr natural: 0,1,4,9,16,25, ...
 Un pătrat perfect nu poate avea ultima cifră 2, 3, 7 sau 8
 -Cub perfect = este egal cu cubul unui număr natural: 0, 1, 8, 27, ...
 -Teorema împărțirii cu rest $[D=C \cdot R + R, R < C]$
 (D=deîmpărțit, I=Împărțitor, C=Cât, R=Rest)
 -suma lui Gauss $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$

Divizibilitate

<http://scribborodi.ro/>
 $2 | 18$ (2 divide pe 18) $18 : 3$ (18 este divizibil cu 3)
 -Divizorii lui 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18
 -Multiplii lui 18: 0, 18, 36, 54, ...
 -număr prim =se divide doar cu 1 și el însuși: 2, 3, 5, 7, 11, ...
 -număr compus =care nu este prim: 4, 6, 8, 9, 10, ...
 -Cel mai mare divizor comun (8;12)=4
 Numere prime între ele = a.c.m.m.d.c.=1 (ex. 15 și 8)
 -Cel mai mic multiplu comun [8;12]=24
 -Dacă $a = 2^5 \cdot 3 \cdot 7^2$ și $b = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$, atunci a și b au
 c.m.m.d.c.=2³·7 și c.m.m.m.c.=2⁵·3·7²·5
 -Câți divizori naturali are un număr: dacă $n = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7^2$,
 atunci n are (5+1)·(3+1)·(2+1)=180 divizori naturali
Criterii de divizibilitate
 -cu 2 : dacă are ultima cifră 0,2,4,6 sau 8 (ex. 756;1934)
 -cu 3 : dacă suma cifrelor se divide cu 3 (ex. 261;1005)
 -cu 4 : dacă nr. format din ultimele 2 cifre se divide cu 4 (ex. 912)
 -cu 5 : dacă are ultima cifră 0 sau 5 (ex. 295;1330)
 -cu 9 : dacă suma cifrelor se divide cu 9 (ex. 495;8001)
 -cu 10 : dacă are ultima cifră 0 (ex. 730;1900)
 -cu 25 : dacă nr.format din ultimele 2 cifre se divide cu 25(ex.375)

Reguli de calcul

-Frații zecimale 1,37+52,4=53,77; 3-1,2=1,8; 3,87·10=38,7 0,02·1000=20;
 2,3·4,25=9,775; 36,2:10=3,62; 2,7:100=0,027; 3,6:4=0,9; 0,26:0,2=2,6;2=1,3
 -Numere întregi 5-8=-3; -4-3=-7; -7+2=-5; -7+9=2; 5-(-2)=-5+2=-3
 3·(-5)=-15; (-4)·(+2)=-8; (-2)·(-3)=6; 8:(-4)=-2; (-5):(-1)=5;
 Numere pozitive: +12; 3;... Numere negative: -23; -3;...
Opusul lui 35 este -35; opusul lui -8 este 8.
 -Puteri 2⁷·2⁵=2¹²; 5¹⁰:5³=5⁷; (7³)⁴=7¹²; (2n³)⁵=8n¹⁵; (-3)²=9;
 (-3)³=-27; (-1)⁷=-1; (-1)⁴=1; 1⁵=1; 9⁰=9; (-7)¹=-7; 3⁰=1; (-6)⁰=1; 0⁷=0;
 $5^{-2} = \frac{1}{5^2}; (-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$
 -Frații ordinare $\frac{1}{6} + \frac{5}{4} = \frac{21}{6} + \frac{35}{4} = \frac{17}{12}; \frac{7}{6} \cdot \frac{5}{4} = \frac{35}{24}; \frac{7}{2} : \frac{5}{3} = \frac{7 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{21}{10}; (\frac{2}{3})^5 = \frac{2^5}{3^5}$
 Inversul lui 35 este $\frac{1}{35}$; inversul lui $\frac{3}{7}$ este $\frac{7}{3}$
 Frații etajate $\frac{3}{7} : \frac{4}{5} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 4} = \frac{15}{28}$

Factor comun

$3x+3y=3(x+y); 7a+28=7(a+4); 10n-5=5(2n-1);$
 $8-8k=8(1-k); x^2+x^2=x^2(x+1); 4y-6y^2=2y(2-3y^2)$

Transformarea fracțiilor zecimale

-Finite $0,7 = \frac{7}{10}; 0,207 = \frac{207}{1000}; 3,45 = \frac{345}{100}$
-Periodice simple $0,(73) = \frac{73}{99}; 2,(5) = 2\frac{5}{9} = \frac{23}{9}$
-Periodice mixte $0,13(5) = \frac{135-13}{900} = \frac{122}{900}$

Formule de calcul

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
 $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
 $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Aproximări

Fie numărul 3,1476. Aproximat cu:
 -o zecime prin lipsă=3,1; o zecime prin adaus=3,2
 -o sutime prin lipsă=3,14; o sutime prin adaus=3,15
Partea întreagă a unui număr x este [x], cel mai mare număr întreg $\leq x$. Ex. [3,7]=3; [6]=6; [0,25]=0; [-3,1]=-4
Partea fracționară a lui x este definită astfel: {x} = x - [x].
 Ex. {3,7}=0,7; {4}=0; {0,2}=0,2; {-3,1}=0,9

Modul (valoare absolută)

$|6|=6; |-3|=3$. În general, $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$
 Ex. $|3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2}$, deoarece $3 - \sqrt{2} \geq 0$
 $|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$, deoarece $1 - \sqrt{2} < 0$

Comparări

$\frac{7}{5} > \frac{4}{5}; \frac{9}{2} > \frac{9}{7}; \frac{2}{9} < 1$
 $2,4 > 2,39; -4,1 < -3,82$
 $\sqrt{3} > 1; -\sqrt{6} > -\sqrt{10}$

Descompunerea expresiilor în factori

-Prin factor comun
 $x^3 - 5x^2 = x^2(x - 5); (n - 4)^5 + (n - 4)^4 = (n - 4)^4(n - 4 + 1)$
 -Prin formule
 $y^2 - 25 = (y - 5)(y + 5); 9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$
 -Prin grupări de termeni
 $2n^3 + 2n^2 + 7n + 7 = 2n^2(n + 1) + 7(n + 1) = (n + 1)(2n^2 + 7)$
 $x^2 + 6x + 8 = x^2 + 4x + 2x + 8 = x(x + 4) + 2(x + 4) = (x + 4)(x + 2)$

Ecuatia de gradul doi

Forma generală $ax^2 + bx + c = 0$.

Rezolvare: calculăm Δ (**delta**), $\Delta = b^2 - 4ac$.

Dacă $\Delta < 0$, ecuația nu are soluții.

Dacă $\Delta > 0$, soluțiile sunt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Sisteme de ecuații

-Rezolvare prin metoda substituției

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 11 \end{cases} \begin{cases} x = 4 + y \\ 2(4 + y) + y = 11 \end{cases} \begin{cases} x = 4 + y \\ 8 + 3y = 11 \end{cases} \begin{cases} x = 4 + y \\ 3y = 3 \end{cases} \begin{cases} x = 4 + y \\ y = 1 \end{cases}$$

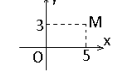
-Rezolvare prin metoda reducerii

$$\begin{cases} a - b = 4 \\ 3a + 2b = 22 \end{cases} \cdot 2 \quad \begin{cases} 2a - 2b = 8 \\ 3a + 2b = 22 \end{cases} \text{ (se adună ecuațiile)}$$

 $5a / = 30 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow b = 4$

Sistem de axe

Ox- axa absciselor
 Oy- axa ordonatorilor
 Punctul M(5;3)
 5 și 3 sunt coordonatele punctului M.
 Numărul 5 este abscisa, iar 3 este ordonata lui M.



Medii

Aritmetică $m_a = \frac{x+y}{2}$; Geometrică $m_g = \sqrt{xy}$
 Armonică $m_h = \frac{2xy}{x+y}$
Media aritmetică ponderată a numerelor 10; 12; 9,
 având ponderile 3; 6; 5 este $m_{op} = \frac{10 \cdot 3 + 12 \cdot 6 + 9 \cdot 5}{3 + 6 + 5}$
Inegalitatea mediilor $m_h \leq m_g \leq m_a$

Funcții

Spunem că am definit o funcție pe mulțimea A cu valori în mulțimea B dacă facem ca fiecărui element din A să-i corespundă un singur element în B.
 $f: A \rightarrow B$ (citim "funcția f definită pe A cu valori în B")
 A - domeniul de definiție, B - domeniul de valori
Funcția liniară (de gradul I) este o funcție de forma $f: R \rightarrow R, f(x) = ax + b$.

Ex. $f(x) = 3x - 5$

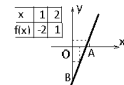
- Reprezentare grafică. Fie $f: R \rightarrow R, f(x) = 3x - 5$

Calcularea coordonatelor punctelor de intersecție a graficului cu axele:

-cu axa Ox se rezolvă ecuația $f(x) = 0$; $3x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \Rightarrow A(\frac{5}{3}; 0)$

-cu axa Oy se calculează $f(0)$; $f(0) = -5 \Rightarrow B(0; -5)$

Calcularea coordonatelor punctului de intersecție a graficelor a două funcții f și g: se rezolvă ecuația $f(x) = g(x)$



Unități de măsură

Lungime	Arie	Volum	Capacitate	Masă	Timp
3 m=30 dm	7 m²=700 dm²	5 m³=5000 dm³	1 l=1 dm³	4 kg=4000 g	1 oră=60 minute
0,7 m=70 cm	0,05m²=500 cm²	0,03 cm³=30 mm³	3 l=3000 ml	0,5 dag=5 g	1 minut=60 secunde
2 km=2000 m	2 km²=200 hm²	0,05 km³=50 hm³	0,3 dal=3 l	7 cg=70 mg	1 deceniu=10 ani
3,5 cm=35 mm	1 ar=1dam²=100 m²	1 dm³=1000 cm³	0,2 hl=20 l	2 hg=200 g	1 secol=100 ani
2,7 dam=27 hm	1 ha=1hm²=100 ari	1 m³=10⁹mm³	125 ml=0,125 l	6,23 g=62,3 dg	1 mileniu=1000 ani
1,3 mm=0,13 cm	0,02 ha =2 ari= 200 m²	3 mm³=0,003 cm³	0,07 kl=70 l	3 t=3000 kg	¼ ore=15 minute
5,7 hm=570 m	0,04 m²=400 cm²	0,25 dam³=250 m³	3 cl=0,3 dl	34 dg=0,34 g	½ ore=30 minute

Unghiuri

- congruente: au măsuri egale
- adiacente: au același vârf și o latură comună
- opuse la vârf: au același vârf și laturile unuia sunt în prelungirea laturilor celuilalt

Două unghiuri opuse la vârf sunt congruente

- complementare: două unghiuri care au suma 90°
Ex. complementul unghiului de 20° este unghiul de 70°
- suplementare: două unghiuri care au suma 180°
Ex. suplementul unghiului de 20° este unghiul de 160°
- unghi alungit: care are 180° ; unghi nul care are 0°
- unghi propriu: care nu este nici alungit, nici nul
- unghi ascuțit $< 90^\circ$; drept = 90° ; obtuz $> 90^\circ$

unghiuri în jurul unui punct

Suma unghiurilor în jurul unui punct este 360°

- Unghiuri formate de două drepte cu o secantă
- alterne interne: 1 și 7; 2 și 8
- alterne externe: 3 și 5; 4 și 6
- corespondente: 1 și 5; 2 și 6; 3 și 7; 4 și 8

Dacă dreptele sunt paralele, aceste perechi de unghiuri sunt congruente și reciproc.

Puncte și drepte

- puncte coliniare: sunt situate pe o dreaptă
- drepte concurente: drepte care se intersectează
- punct de concurență: punctul în care se intersectează două drepte
- semidreapta deschisă: $(OA \ O \notin (OA$
- semidreapta închisă: $[OA \ O \in [OA$
- segmente congruente: au lungimi egale $[AB] \equiv [CD]$
- drepte perpendiculare: formează un unghi drept $a \perp b$
- drepte paralele: sunt în același plan și nu se intersectează $a \parallel b$

Axioma lui Euclid

printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la dreapta dată.

Figuri geometrice

Triunghi

- isoscel: are două laturi congruente
- echilateral: are toate laturile congruente
- oarecare: are laturi de lungimi diferite
- ascuțitunghic: toate unghiurile ascuțite
- dreptunghic: are un unghi drept
- catete: laturile care formează unghiul drept
- ipotenuza: latura opusă unghiului drept
- obtuzunghic: are un unghi obtuz

Patrulater

- Paralelogram: are laturile opuse paralele

Proprietățile paralelogramului:

- laturile opuse sunt congruente
- unghiurile opuse sunt congruente, iar unghiurile alăturate sunt suplementare
- diagonalele au același mijloc

Dreptunghiul:

paralelogramul care are un unghi drept

- diagonalele dreptunghiului sunt congruente

Rombul:

paralelogramul care are două laturi alăturate congruente

- diagonalele rombului sunt perpendiculare și sunt bisectoare ale unghiurilor

Pătratul:

are toate proprietățile dreptunghiului și rombului

Trapezul:

are două laturi paralele și celelalte două neparalele

- Trapez isoscel: are laturile neparalele congruente
- Trapez dreptunghic: are un unghi drept

Teoreme importante

- suma unghiurilor unui triunghi este 180°
- suma unghiurilor unui patrulater este 360°
- unghiurile de la baza unui triunghi isoscel sunt congruente
- într-un triunghi isoscel, biseectoarea unghiului de la vârf este și mediană, înălțime, mediatoare.
- într-un triunghi dreptunghic, mediana din vârful unghiului drept este jumătate din ipotenuză.
- într-un triunghi dreptunghic care are un unghi de 30° , cateta opusă acestui unghi este jumătate din ipotenuză.

teorema lui Thales:

$$EF \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$$

teorema fundamentală a asemănării:

dacă $EF \parallel BC$, atunci $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (sunt asemenea), adică

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare

Linii importante în triunghi

- Bisectoarea: împarte un unghi în două unghiuri congruente. Bisectoarele sunt concurente în I - centrul cercului înscris
- Mediatoarea: perpendiculară pe mijlocul unei laturi. Mediatoarele sunt concurente în O - centrul cercului circumscris. La triunghiul obtuzunghic, O este situat în exterior. La triunghiul dreptunghic, O este în mijlocul ipotenuzei.
- Înălțimea: perpendiculara dintr-un vârf pe latura opusă. Înălțimile sunt concurente în H - ortocentrul. La triunghiul obtuzunghic, H este în exterior.
- Mediana: unește un vârf cu mijlocul laturii opuse. Medianele sunt concurente în G - centrul de greutate. Centrul de greutate este la $\frac{1}{3}$ de bază și $\frac{2}{3}$ de vârf: $GM = \frac{1}{3}AM, GA = \frac{2}{3}AM$

Teoreme importante

- teorema bisectoarei: dacă AD este bisectoarea, $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$
- Într-un Δ dreptunghic:
 - teorema înălțimii: $AD = \sqrt{BD \cdot DC}$
 - teorema catetelor: $AB = \sqrt{BD \cdot BC}$
 - teorema lui Pitagora: $AB^2 + AC^2 = BC^2$
- unghiul la centru $\angle AOB$ are măsura egală cu a arcului cuprins între laturi
- unghiul înscris $\angle AMB$ are măsura jumătate din a arcului cuprins între laturi
- raza este perpendiculară pe tangentă
- unghiul format de o tangentă cu o coardă este jumătate din arcul subîntinse de coardă
- diametrul perpendicular pe o coardă înjumătățește și coarda și arcul.
- teorema celor trei perpendiculare: $AM \perp \alpha, MB \perp d \Rightarrow AB \perp d$

Arii și alte formule

Triunghi

$$A_s = \frac{b \cdot h}{2}; A_s = \frac{ab \sin u}{2}; A_s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

unde p este semiperimetrul, $p = \frac{a+b+c}{2}$ (formula lui Heron)

- Triunghi echilateral: înălțimea $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; aria $A_{ech} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
- Triunghi dreptunghic: înălțimea $h = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip}$; aria $A_{adr} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$

Linia mijlocie în triunghi

-unește mijloacele a două laturi; Este paralelă cu a treia latură și este jumătate din aceasta.

Raza cercului înscris în triunghi $r = \frac{A}{p}$

Paralelogram

 $A = b \cdot h$

Dreptunghi

 $A = l \cdot l$

Romb

 $A = \frac{D \cdot d}{2}$ (sau $b \cdot h$)

Pătrat diagonala $d = l\sqrt{2}$, aria $A = l^2$

Trapez

 $A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$

Linia mijlocie în trapez

-unește mijloacele laturilor neparalele; Este paralelă cu bazele și este egală cu media lor aritmetică: $l_m = \frac{B+b}{2}$

Poligon regulat

apotema $a_n = R \cos \frac{180^\circ}{n}$; latura $l_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$

Măsura unghiului $u_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$; Nr. diagonalelor = $\frac{n(n-3)}{2}$

Cerc

Lungimea (circumferința) $L = 2\pi R$, Aria $A = \pi R^2$, $\pi \approx 3,14159265...$

Poliedre

Prisma

 $V = A_B \cdot h$

A_L = suma ariilor fețelor laterale
Aria totală $A_T = A_L + 2A_B$

Diagonala paralelipiped $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
Diagonala cubului $d = l\sqrt{3}$

Piramida

 $V = \frac{A_B \cdot h}{3}$

A_L = suma ariilor fețelor laterale
Aria totală $A_T = A_L + A_B$
apotemă = înălțimea unei fețe laterale

Trunchiul de piramidă

 $V = \frac{h}{3} (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b})$

A_L = suma ariilor fețelor laterale
Aria totală $A_T = A_L + A_B + A_b$

Corpuri rotunde

Cilindrul

 $A_L = 2\pi R G$
 $A_T = A_L + 2A_B$
 $V = \pi R^2 h$

Conul

 $A_L = \pi R G$
 $A_T = A_L + A_B$
 $V = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$

unghiul sectorului desfășurării $u = \frac{360^\circ R}{G}$

Trunchi de con

 $A_L = \pi G (R+r)$
 $A_T = A_L + A_B + A_b$
 $V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$

Sfera

 $A = 4\pi R^2$
 $V = \frac{4\pi R^3}{3}$

Trigonometrie

	30°	45°	60°
sinus = $\frac{\text{cat.op.}}{\text{ip}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosinus = $\frac{\text{cat.al.}}{\text{ip}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangenta = $\frac{\text{cat.op.}}{\text{cat.al.}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
cotangenta = $\frac{\text{cat.al.}}{\text{cat.op.}}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$			
$\text{tg } u = \frac{\sin u}{\cos u}$			